

高考数学 100 个高频考点

1. 集合的性质：①任何一个集合是它本身的子集，记为 $A \subseteq A$ ；

②空集是任何集合的子集，记为 $\phi \subseteq A$ ；

③空集是任何非空集合的真子集；

2. 四种命题的形式及相互关系：

原命题：若 P 则 q； 逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg P$ 则 $\neg q$ ； 逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$ 。

①、原命题为真，它的逆命题不一定为真。

②、原命题为真，它的否命题不一定为真。

③、原命题为真，它的逆否命题一定为真。

3. 函数的性质

(1) 定义域： (2) 值域：

(3) 奇偶性：（在整个定义域内考虑）

①定义：①偶函数： $f(-x) = f(x)$, ②奇函数： $f(-x) = -f(x)$

②判断方法步骤： a. 求出定义域； b. 判断定义域是否关于原点对称； c. 求 $f(-x)$ ； d. 比较 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 或 $f(-x)$ 与 $-f(x)$ 的关系。

(4) 函数的单调性

定义：对于函数 $f(x)$ 的定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ,

(1)若当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；

(2)若当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。

4. 二次函数的解析式的三种形式

①一般式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)；

②顶点式 $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$)；

③零点式 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a \neq 0$)。

5. 设 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ 那么

$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数；

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是减函数。}$$

设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导, 如果 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为增函数; 如果 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 为减函数。

6. 函数 $y=f(x)$ 的图象的对称性: ① 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow f(2a-x) = f(x)$ 。

7. 两个函数图象的对称性:

(1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ (即 y 轴) 对称。

(2) 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

8. 分数指数幂 $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ($a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } n > 1$)。

分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}$ ($a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } n > 1$)。

9. $\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N$ ($a > 0, a \neq 1, N > 0$)

10. 对数的换底公式

$$\log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a}, \text{ 推论 } \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

11. $a_n = \begin{cases} s_1, & n = 1 \\ s_n - s_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases} \quad \text{— } \geq \text{ (数列 } \{ a_n \} \text{ 的前 } n \text{ 项的和为 } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{)}。$

(注意此公式第 2 行顺推与逆推的应用, 这是递推数列的常用公式, 可以达到不同的目的)

12. 等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + a_1 - d$ ($n \in \mathbb{N}^*$) *

其前 n 项和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{1}{2}d)n$

13. 等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$);

$$\text{其前 } n \text{ 项的和公式 } S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1 \\ na_1, q = 1 \end{cases} \text{ 或 } S_n = \begin{cases} \frac{a_1 - a_n q^n}{1-q}, q \neq 1 \\ na_1, q = 1 \end{cases}$$

(小心: 解答题利用错位相减法时要特别注意讨论 $q=1$ 的情况)

14. 同角三角函数的基本关系式 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$

15. 和角与差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (\text{平方正弦公式});$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad (\text{平方余弦公式});$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi) \quad (\text{辅助角 } \varphi \text{ 所在象限由点 } (a, b) \text{ 的象限决定, } \tan \varphi = \frac{b}{a}).$$

(建议利用 φ 的正弦和余弦来确定其位于哪个象限, 这样比较好理解)

16. 二倍角公式 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ 。

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

17. 三角函数的周期公式 函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$ 及函数 $y = \cos(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbb{R}$ (A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0, \omega > 0$) 的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$; 函数 $y = \tan(\omega x + \varphi)$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0, \omega > 0$) 的周期 $T = \frac{\pi}{\omega}$ 。(注意 ω 小于 0 的函数周期的求法)

18. 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。(学会利用后面的 $2R$)

19. 余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

(注意其变形公式)

20. 面积定理

$$(1) S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c \quad (h_a, h_b, h_c \text{ 分别表示 } a, b, c \text{ 边上的高})。$$

$$(2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B。$$

21. 三角形内角和定理 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$A + B + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi - (A + B) \Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2} \Leftrightarrow 2C = 2\pi - 2(A + B)。$$

(很多与三角形有关的恒等变形或者纯粹解三角形的题目中会用到这些关系)

22. 平面两点间的距离公式

$$d_{A, B} = |\vec{AB}| = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (A(x_1, y_1), B(x_2, y_2))。$$

23. 向量的平行与垂直 设 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, 且 $b \neq 0$, 则

$$a // b \Leftrightarrow b = \lambda a \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$a \perp b (a \neq 0) \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

24. 线段的定比分公式 设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P(x, y)$ 是线段 P_1P_2 的分点, λ 是实数, 且

$$\vec{P_1P} = \lambda \vec{PP_2}, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

(这个公式很重要, 不要记错!)

25. 三角形的重心坐标公式 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$,

则 $\triangle ABC$ 的重心的坐标是 $G(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$ 。

$$26. \text{ 点的平移公式 } \begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - h \\ y = y' - k \end{cases} \Leftrightarrow \vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{PP'} \quad (\text{图形}F\text{上的任意一点}P(x, y))$$

在平移后图形 F' 上的对应点为 $P'(x', y')$, 且 $\vec{PP'}$ 的坐标为 (h, k) 。

(要注意区别新坐标、旧坐标, 区别新方程和旧方程, 不要混淆, 解答题务必要体现以上公式的使用过程, 关键步骤不要省)

27. 常用不等式:

$$(1) a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \text{ (当且仅当 } a=b \text{ 时取“=”号)}。$$

$$(2) a, b \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (当且仅当 } a=b \text{ 时取“=”号)}。$$

$$(3) a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \text{ (} a>0, b>0, c>0 \text{)}。$$

(4) 柯西不等式 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ 。(建议: 了解一下, 尝试用向量数量积的方法证明之)

$$(5) |a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

28. 极值定理 已知 x, y 都是正数, 则有

(1) 如果积 xy 是定值 p , 那么当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$;

(2) 如果和 $x+y$ 是定值 s , 那么当 $x=y$ 时积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$ 。

29. 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) ($a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$), 如果 a 与 $ax^2 + bx + c$ 同号, 则其解集在两根之外; 如果 a 与 $ax^2 + bx + c$ 异号, 则其解集在两根之间。简言之: 同号两根之外, 异号两根之间。

$$x_1 < x < x_2 \Leftrightarrow (x - x_1) < 0 (x_1 < x_2);$$

$$x < x_1, \text{ 或 } x > x_2 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) > 0 (x_1 < x_2)$$

(这类问题一般可以借助于韦达定理或者结合图象特点寻找约束条件就可以解决问题)

30. 含有绝对值的不等式当 $a > 0$ 时, 有

$$|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x > a \text{ 或 } x < -a。$$

31. 无理不等式

$$(1) \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$(2) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$(3) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

32. 指数不等式与对数不等式

(1) 当 $a > 1$ 时,

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x); \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x); \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

33. 斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2))$

(很多代数问题可以利用这个公式转化为几何问题, 简化解题过程, 这是数形结合思想的重要体现)

34. 直线的四种方程

(1) 点斜式 $y - y_1 = k(x - x_1)$ (直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$, 且斜率为 k)。

(2) 斜截式 $y = kx + b$ (b 为直线 l 在 y 轴上的截距)。

(注意: (1) 截距不是距离; (2) 过原点的直线也具有横、纵截距相等的特征)

(3) 两点式 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (y_1 \neq y_2) (P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2))$ 。

(4) 一般式 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0)。

35. 两条直线的平行和垂直

(1) 若 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$

$$\textcircled{1} l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2;$$

$$\textcircled{2} l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$$

(2) 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 且 A_1, A_2, B_1, B_2 都不为零,

$$\textcircled{1} l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

$$\textcircled{2} l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0;$$

$$36. \text{ 夹角公式 } \tan \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|. \quad (l_1: y = k_1 x + b_1, l_2: y = k_2 x + b_2, k_1 k_2 \neq -1)$$

(要区别于直线 a 到直线 b 的角的求解公式)。直线 $l_1 \perp l_2$ 时, 直线 l_1 与 l_2 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$ 。

$$37. \text{ 点到直线的距离 } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{点 } P(x_0, y_0), \text{ 直线 } l: Ax + By + C = 0)。$$

38. 圆的四种方程

$$(1) \text{ 圆的标准方程 } (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(2) \text{ 圆的一般方程 } x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 (D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

$$(3) \text{ 圆的参数方程 } \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$$

$$(4) \text{ 圆的直径式方程 } (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \quad (\text{圆的直径的端点是 } A(x_1, y_1),$$

$B(x_2, y_2)$)。 (可利用向量垂直理解之)

$$39. \text{ 椭圆 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ 的参数方程是 } \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}。$$

(圆和椭圆的参数方程一定要过关)

40. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 焦半径公式 $|PF_1| = e(x + \frac{a^2}{c}), |PF_2| = e(\frac{a^2}{c} - x)$ 。

(自己还可以适当化简)

41. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦半径公式

$$|PF_1| = |e(x + \frac{a^2}{c})|, |PF_2| = |e(\frac{a^2}{c} - x)|。$$

(点p在左支或者右支的时候, 上面的公式都可以去绝对值符号的, 作题时自己灵活处理)

42. 抛物线 $y^2 = 2px$ 上的动点可设为 $P(\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$ 或 $P(2pt^2, 2pt)$ 或 $P(x, y)$, 其中 $y^2 = 2px$ 。

(强烈建议理解: 以抛物线的焦点弦为直径的圆和抛物线的准线相切)

43. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} (a \neq 0)$ 的图像是抛物线:

(1) 顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$;

44. 直线与圆锥曲线相交的弦长公式

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ 或}$$

$$|AB| = \sqrt{(1 + k^2)(x_2 - x_1)^2} = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = |y_1 - y_2| \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$$

(注意和韦达定理结合使用)

(弦端点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由方程 $\begin{cases} y = kx + b \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ 消去 y 得到 $ax^2 + bx + c = 0, \Delta > 0$,

α 为直线 AB 的倾斜角, k 为直线的斜率, 以上化简思路再结合韦达定理使用, 是很多圆锥曲线解答的常用解题技巧)

45. 圆锥曲线的对称问题: 曲线 $F(x, y) = 0$ 关于点 $P(x_0, y_0)$ 成中心对称的曲线是

$$F(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0。$$

(可以利用中点坐标公式推导之)。

46. 对于一般的二次曲线 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 用 x_0x 代 x^2 , 用 y_0y 代 y^2 ,

用 $\frac{x_0y + xy_0}{2}$ 代入 xy , 用 $\frac{x_0 + x}{2}$ 代 x , 用 $\frac{y_0 + y}{2}$ 代入 y 即得方程

$$Ax_0x + B \cdot \frac{x_0y + xy_0}{2} + Cy_0y + D \cdot \frac{x_0 + x}{2} + E \cdot \frac{y_0 + y}{2} + F = 0, \text{ 曲线的切线、切点弦方程均}$$

可由此方程得到。

47. 共线向量定理 对空间任意两个向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), $\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow$ 存在实数 λ 使 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ 。

48. 对空间任一点 O 和不共线的三点 A 、 B 、 C , 满足 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, 则四点 P 、 A 、 B 、 C 是共面 $\Leftrightarrow x + y + z = 1$ 。

49. 空间两个向量的夹角公式 $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ ($\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$,

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$)。

50. 直线 AB 与平面所成角 $\beta = \arcsin \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{m}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{m}|}$ (\vec{m} 为平面 α 的法向量)。

51. 二面角 $\alpha - l - \beta$ 的平面角 $\theta = \arccos \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$ 或 $\pi - \arccos \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|}$ (\vec{m} , \vec{n} 为平面 α , β 的

法向量)。

52. 设 AC 是 α 内的任一条直线, 且 $BC \perp AC$, 垂足为 C , 又设 AO 与 AB 所成的角为 θ_1 , AB 与 AC 所成的角为 θ_2 , AO 与 AC 所成的角为 θ 。则 $\cos \theta = \cos \theta_1 \cos \theta_2$ 。

53. 空间两点间的距离公式 若 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$d_{A, B} = |\vec{AB}| = \sqrt{|\vec{AB} \cdot \vec{AB}|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}。$$

54. 异面直线间的距离 $d = \frac{|\vec{CD} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ (l_1, l_2 是两异面直线, 其公垂向量为 \vec{n} , C、D 分别是

l_1, l_2 上任一点, d 为 l_1, l_2 间的距离)。

55. 点 B 到平面 α 的距离 $d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ (\vec{n} 为平面 α 的法向量, AB 是面 α 的斜线, $A \in \alpha$)。

56. 面积射影定理 $S = \frac{S'}{\cos\theta}$

(平面多边形及其射影的面积分别是 S, S' , 它们所在平面所成锐二面角的为 θ)。

57. 球的半径是 R , 则其体积是 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 其表面积是 $S = 4\pi R^2$ 。

58. 分类计数原理 (加法原理) $N = m_1 + m_2 + \Lambda + m_n$ 。

59. 分步计数原理 (乘法原理) $N = m_1 \times m_2 \times \Lambda \times m_n$ 。

60. 排列数公式 $A_n^m = n(n-1)\Lambda(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$, 且 $m \leq n$)。

61. 排列恒等式 (1) $A_n^m = (n-m+1)A_n^{m-1}$; (2) $A_n^m = \frac{n}{n-m}A_{n-1}^m$; (3) $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$;

(4) $nA_n^n = A_{n+1}^{n+1} - A_n^n$; (5) $A_{n+1}^m = A_n^m + mA_n^{m-1}$ 。(建立了解, 会用排列数公式推导之)

62. 组合数公式 $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\Lambda(n-m+1)}{1 \times 2 \times \Lambda \times m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$, 且 $m \leq n$)。

63. 组合数的两个性质

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; (2) $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

64. 组合恒等式

(1) $C_n^m = \frac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$; (2) $C_n^m = \frac{n}{n-m}C_{n-1}^m$; (3) $C_n^m = \frac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$; (4) $\sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n$;

(5) $C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \Lambda + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$ 。(建议了解, 会用组合数公式推导之)

65. 排列数与组合数的关系是: $A_n^m = m!C_n^m$

66. 二项式定理 $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \Lambda + C_n^r a^{n-r}b^r + \Lambda + C_n^n b^n$;

二项展开式的通项公式: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r}b^r$ ($r=0, 1, 2, \dots, n$)。

(注意通项的下标)

67. 等可能性事件的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$ 。

68. 互斥事件 A, B 分别发生的概率的和 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 。

69. n 个互斥事件分别发生的概率的和

$P(A_1+A_2+\dots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ 。

70. 独立事件 A, B 同时发生的概率 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ 。

71. n 个独立事件同时发生的概率 $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$ 。

72. n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$ 。

73. 离散型随机变量的分布列的两个性质:

(1) $P_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots$); (2) $P_1 + P_2 + \Lambda = 1$ 。

74. 数学期望 $E\xi = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \Lambda + x_n P_n + \Lambda$

75. 数学期望的性质:

(1) $E(a\xi+b) = aE(\xi) + b$;

(2) 若 $\xi \sim B(n, p)$, 则 $E\xi = np$ 。

(要将 n 次独立重复实验有 k 次发生这样一个问题与二项分布联系起来)

76. 方差 $D\xi = (x_1 - E\xi)^2 \cdot p_1 + (x_2 - E\xi)^2 \cdot p_2 + \Lambda + (x_n - E\xi)^2 \cdot P_n + \Lambda$

(还有一个变形公式可以求方差, 你记得吗? 在下面会有的)

77. 标准差 $\sigma\xi = \sqrt{D\xi}$ 。(了解, 防止你看到标准差的符号不认识, 呵呵)

78. 方差的性质

(1) $D(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$;

(2) $D(a\xi + b) = a^2 D\xi$;

(3) 若 $\xi \sim B(n, p)$, 则 $D\xi = np(1-p)$ 。

79. 正态分布密度函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 式中的实数 μ , σ ($\sigma > 0$) 是参数, 分别表示个体的平均数与标准差。(了解即可)

80. 标准正态分布密度函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 。(了解即可, 但是要注意其概率分布图的特点, 包括阴影部分面积所表示的含义, 考的概率不大, 但是要防止考小题。)

81. 对于 $N(\mu, \sigma^2)$, 取值小于 x 的概率 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 。

$$P(x_1 < x_0 < x_2) = P(x < x_2) - P(x < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

(个人觉得: 要理解之, 考的概率不大, 但是还是要防止出小题。)

82. 特殊数列的极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{不存在} & |q| > 1 \text{ 或 } q = -1 \end{cases}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \Lambda + a_0}{b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \Lambda + b_0} = \begin{cases} 0 & (k < t) \\ \frac{a_t}{b_t} & (k = t) \\ \text{不存在} & (k > t) \end{cases}$$

$$(3) S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \quad (S \text{ 无穷等比数列 } \{a_1 q^{n-1}\} (|q| < 1) \text{ 的和})$$

84. 函数的夹逼性定理

如果函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在点 x_0 的附近满足:

$$(1) g(x) \leq f(x) \leq h(x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \text{ (常数)}, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

本定理对于单侧极限和 $x \rightarrow \infty$ 的情况仍然成立。

(个人觉得: 有必要了解一下, 防止出新题)

85. 两个重要的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e (e = 2.718281845 \dots)$$

(个人觉得需要了解一下, 防止出新题。看不懂也不要压力, 这是超范围的。)

86. $f(x)$ 在 x_0 处的导数 (或变化率或微商)

$$f'(x_0) = y'|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

87. 瞬时速度

$$v = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

88. 瞬时加速度

$$a = v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \text{ (注意这个物理意义)}$$

$$89. f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 的导数 } f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

90. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y = f(x)$ 在 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率 $f'(x_0)$,

相应的切线方程是 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 。

91. 几种常见函数的导数

$$(1) C' = 0 \text{ (C 为常数)}$$

$$(2) (x_n)' = nx^{n-1} (n \in Q)$$

$$(3) (\sin x)' = \cos x$$

$$(4) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(5) (\ln x)' = \frac{1}{x}; (\log a^x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

$$(6) (e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \ln a.$$

92. 复合函数的求导法则

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处有导数 $u_x' = \varphi'(x)$, 函数 $y = f(u)$ 在点 x 处的对应点 U 处有导数 $y_u' = f'(u)$, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 处有导数, 且 $y_x' = y_u' \cdot u_x'$, 或写作 $f_x'(\varphi(x)) = f'(u)\varphi'(x)$.

93. 可导函数 $y = f(x)$ 的微分 $dy = f'(x) dx$.

94. 注意构造新的函数, 再利用导数的有关性质来解题的解题技巧。

95. $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$. ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

96. 复数 $z=a+bi$ 的模: $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

97. 复数的四则运算法则

$$(1) (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i;$$

$$(2) (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i;$$

$$(3) (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i;$$

$$(4) (a+bi) \div (c+di) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (c+di \neq 0)$$

98. 极坐标与直角坐标互换

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & y = \rho \sin \theta \\ \rho^2 = x^2 + y^2, & \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0). \end{cases}$$

99. 圆的参数方程 $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$

100. 椭圆参数方程 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$

